CAP 3. DINÂMICA QUÂNTICA [SAK. 2.1]

- Agora vamos estudar como os sist. quânticos evoluem no tempo.
- O tempo é um parâmetro, e não um observável em MQ não-relativística. Em MQ relativística, tempo e coordenadas passam ambos a ser parâmetros, mas não veremos isto neste curso.

OP. de evolução temporal

- Evolução de kets: $\underbrace{|\alpha, t_0\rangle = |\alpha\rangle}_{\text{inicial}} \xrightarrow{U(t,t_0)} \underbrace{|\alpha, t_0; t\rangle}_{\text{evoluído em } t}$
- Já vimos as propriedades de op. p/ transformações contínuas:
  - $U^\dagger U = \mathbb{1}$ (unitariedade, preserva a norma)
  - $U(t_2,t_0) = U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)$ (composição)
  - $\lim_{dt\to 0} U(t_0+dt, t_0) = \mathbb{1}$
- A evolução infinitesimal que satisfaz as propriedades acima é

$$U(t_0+dt, t_0) = \mathbb{1} - i\Omega\, dt$$

com $\Omega^\dagger = \Omega$ op. Hermitiano.

Agora:

1. Ω tem dim. de frequência (inverso do tempo).
2. Em mec. clássica, o gerador de evolução temporal é a Hamiltoniana.

$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{H}{\hbar}}$ por questão de análise dimensional.

$$\Rightarrow \boxed{U(t_0+dt, t_0) = \mathbb{1} - \frac{iH\,dt}{\hbar}}$$

- Mais adiante, o teorema de Ehrenfest justifica o fato das CTES c/ dimensão de ação que aparecem em $U(t_0+dt, t_0)$ e $\mathcal{T}(dx')$ serem a mesma $(\hbar)$.

Eq. de Schrödinger

- Compondo 2 U's: $U(t+dt,t_0) = U(t+dt,t)\,U(t,t_0)$

$$= \left(1 - \frac{iH\,dt}{\hbar}\right) U(t,t_0)$$

$\Rightarrow U(t+dt,t_0) - U(t,t_0) = -i\frac{H}{\hbar}\,dt\,U(t,t_0)$

$\Rightarrow$ Na forma de eq. diferencial: $\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = HU(t,t_0)}$ (I)

= eq. diferencial p/ o op. de evolução temporal (eq. de Schrödinger)

$\Rightarrow$ toda a dinâmica sai desta equação.

- Eq. (I) é equiv. à eq. de Schrödinger p/ kets:

(I) $\cdot|\alpha,t_0\rangle \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle}_{|\alpha,t_0;t\rangle} = H\underbrace{U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle}_{|\alpha,t_0;t\rangle}$

$\Rightarrow \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t_0;t\rangle = H|\alpha,t_0;t\rangle}$ $\Leftarrow$ eq. Schrödinger (II)

- Se soubermos $U(t,t_0)$, sabemos que $|\alpha,t_0;t\rangle = U(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle$, sem precisar resolver a eq. de Schrödinger II. Vamos então obter soluções formais p/ eq. (I) em diversos casos de interesse.

Caso 1: H é indep. de t. Ex: spin precessionando em $\vec{B}$ cte.

Solução de (I): $U(t,t_0) = \exp\left[\frac{-iH\cdot(t-t_0)}{\hbar}\right]$ [fácil de verificar derivando]

Caso 2:

· H depende de t, mas $[H(t), H(t')] = 0 \;\; \forall\, t, t'$. Exemplo: spin $\frac{1}{2}$ em campo $\vec{B} = B(t)\,\hat{z}$.

Solução de (I): $$U(t,t_0) = \exp\left[-\left(\frac{i}{\hbar}\right)\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\right]$$

Verificando: $$(\,) \equiv \left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\right) \quad ; \quad U(t,t_0) = \exp(\,).$$

$$\exp(\,) = 1 + (\,) + \frac{1}{2!}(\,)^2 + \frac{1}{3!}(\,)^3 + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(\,) = \frac{\partial}{\partial t}(\,) + \frac{2}{2!}(\,)\frac{\partial}{\partial t}(\,) + \frac{1}{3!}\cdot 3(\,)^2\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\,) + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\,) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\right) = -\frac{i}{\hbar}H(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\exp(\,) = -\frac{i}{\hbar}H(t) + (\,)\cdot\left(-\frac{i}{\hbar}\right)H(t) + \frac{1}{2!}(\,)^2\left(-\frac{i}{\hbar}H(t)\right) + \dots$$

$$= -\frac{i}{\hbar}H(t)\underbrace{\left[1 + (\,) + \frac{1}{2!}(\,)^2 + \dots\right]}_{\exp(\,)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\exp(\,) = -\frac{i}{\hbar}H(t)\exp(\,) \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar}H(t)\,U(t,t_0)$$

como queríamos verificar.

Caso 3: $H(t)$ dependente de t e arbitrário (não necessariamente comuta p/ t's diferentes)

Ex: SPIN em campo $\vec{B}(t)$.

$$H(t) = \vec{S}\cdot\vec{B}(t)$$

Solução formal: $$U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1)H(t_2)\cdots H(t_n)$$

Prova: veremos bem mais adiante.

O caso 1 (H indep. de t) é o mais simples, vamos assumir que este é o caso daqui para a frente.

$$U(t,t_0) = \exp\left[\frac{-iH\cdot(t-t_0)}{\hbar}\right]$$

Evolução de auto-estados de energia

$$H|a_i\rangle = E_i|a_i\rangle$$

Expandindo $U(t,t_0)$ na base $\{|a_i\rangle\}$:

$$\mathbb{1}\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)\mathbb{1} = \sum_i\sum_j |a_j\rangle\underbrace{\langle a_j|\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)|a_i\rangle}_{\exp\left(-\frac{iE_it}{\hbar}\right)\delta_{ij}}\langle a_i| = \sum_i \exp\left(-\frac{iE_it}{\hbar}\right)|a_i\rangle\langle a_i|$$

• Essa expansão p/ $U(t,t_0)$ nos permite resolver qq. cond. inicial dada ~~na~~ na base $\{|a_i\rangle\}$:

$$|\alpha, t_0=0\rangle = \sum_i |a_i\rangle\overbrace{\langle a_i|\alpha\rangle}^{\equiv c_i} = \sum_i c_i|a_i\rangle$$

$$\Rightarrow |\alpha, t_0=0; t\rangle = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)|\alpha, t_0=0\rangle = \sum_i |a_i\rangle\underbrace{\langle a_i|\alpha\rangle \exp\left(-\frac{iE_it}{\hbar}\right)}_{c_i(t) = c_i(0)\exp\left(-\frac{iE_it}{\hbar}\right)}$$

• Se o est. é inicialmente auto-est. de H: $|\alpha, t_0=0\rangle = |a_i\rangle$

$\Rightarrow |\alpha, t_0=0; t\rangle = |a_i\rangle \exp\left(\frac{-iE_i t}{\hbar}\right)$

$\Rightarrow$ auto-est. de H (ou de A tal que $[A,H]=0$) não mudam c/ t

(est. estacionários).

ROTEIRO p/ resolver dinâmica p/ H indep t

(1) Achar simetrias de H: conj. completo de observáveis A_i tais que

$[A_i, H] = [A_i, A_j] = 0$.

(2) Expando est. inicial $|\alpha, t=0\rangle$ na base de auto-estados comuns a $\{H, A_i\}$.

(3) ~~[illegible]~~ $|\alpha, t_0=0; t\rangle = |K_i\rangle \exp\left(-i\frac{E_{K_i}t}{\hbar}\right)$

índices dos A_i's, H.

Como valores esperados variam c/ t

• Se em $t=0$ temos auto-est. de H: $|a_i, t_0=0; t\rangle = U(t,0)|a_i\rangle$

$\langle B\rangle = \langle a_i|U^{\dagger}(t,0)\, B\, U(t,0)|a_i\rangle$

$= \langle a_i|\exp\left(\frac{iE_i t}{\hbar}\right) B \exp\left(\frac{-iE_i t}{\hbar}\right)|a_i\rangle = \langle a_i|B|a_i\rangle$

$\Rightarrow$ o valor esperado de qualquer observável não muda $\Rightarrow$ est. estacionários.

• ~~[illegible]~~ Est. iniciais que são superposições dos $|a_i\rangle$ NÃO são estacionários:

$|\alpha, t_0=0\rangle = \sum_i c_i|a_i\rangle$

$$\Rightarrow \langle B\rangle = \left[\sum_i c_i^*\langle a_i|\exp\left(\frac{iE_i t}{\hbar}\right)\right] B \left[\sum_j c_j \exp\left(\frac{-iE_j t}{\hbar}\right)|a_j\rangle\right]$$

$$= \sum_{ij} c_i^* c_j \langle a_i|B|a_j\rangle \exp\left[\frac{-i(E_j-E_i)t}{\hbar}\right]$$

• termos oscilam com freqs. angulares $\omega_{ji} = \frac{E_j - E_i}{\hbar}$

Exemplo: precessão de spin $\frac{1}{2}$

• spin $\frac{1}{2}$ com momento magnético $\frac{e\hbar}{2m_e c}$ e sob ação de campo $\vec{B}$:

$$H = -\left(\frac{e}{m_e c}\right)\vec{S}\cdot\vec{B} \qquad (e<0 \text{ p/ elétron})$$

• B estático: $\vec{B} = B\hat{z} \quad \Rightarrow \quad H = -\frac{eB}{m_e c}S_z$

• $[S_z, H] = 0 \Rightarrow$ auto-estados de S_z são auto-est. de H.

$$E_\pm = \mp\frac{e\hbar B}{2m_e c} \quad \text{para } |\pm\rangle_z$$

• Defino $\omega \equiv \frac{|e|B}{m_e c} \Rightarrow \begin{cases} E_\pm = \pm\frac{\hbar\omega}{2} \\ \frac{E_+ - E_-}{\hbar} = \omega. \\ H = \omega S_z \end{cases}$

• Evolução temporal: $U(t,0) = \exp\left(-\frac{i\omega S_z t}{\hbar}\right)$

• Estado inicial: $|\alpha, t=0\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$

$$\Rightarrow |\alpha, t_0=0; t\rangle = c_+ \underbrace{\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)}_{=\exp\left(-\frac{iE_+t}{\hbar}\right)}|+\rangle + c_- \underbrace{\exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right)}_{\exp\left(-\frac{iE_-t}{\hbar}\right)}|-\rangle$$

• Se $c_+ = 1, c_- = 0 \Rightarrow$ est. é $|+\rangle$ sempre.

• Se $c_+ = c_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\alpha, t_0=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) = |+\rangle_x$.

$$\Rightarrow |\langle \pm_x|\alpha, t\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(\langle +| \pm \langle -|\right)\cdot\left(\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)|+\rangle + \exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right)|-\rangle\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\exp\left(\frac{i\omega t}{2}\right)\right|^2 = \begin{cases} \cos^2\frac{\omega t}{2} & \text{p/ } |+\rangle_x \\ \sin^2\frac{\omega t}{2} & \text{p/ } \langle -|_x \end{cases} \quad \text{Prob. de medir } |\pm\rangle_x \text{ em } t.$$

$$\Rightarrow \langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)$$

É fácil calcular $\langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin(\omega t)$, $\langle S_z\rangle = 0$

→ spin **precessiona** no plano xy.

Dinâmica: as descrições de Schrödinger e Heisenberg [SAK. 2.2]

- Vimos que observáveis são operadores (fixos), e kets evoluem de acordo com a eq de Schrödinger – esta é a chamada descrição de Schrödinger da dinâmica.

- Há uma descrição alternativa (chamada de Heisenberg) em que o ket fica "parado" e só os observáveis que evoluem no tempo.

- Vimos como kets evoluem: $|\alpha\rangle \to U|\alpha\rangle$

- Como U é unitário, produtos internos se preservam:

$$\langle\beta|\alpha\rangle \to \langle\beta|U^\dagger U|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$$

- Como mudam valores esperados?

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle \to (\langle\beta|U^\dagger) A (U|\alpha\rangle) = \langle\beta|U^\dagger A U|\alpha\rangle$$

- Há 2 maneiras de interpretar :

  - Schrödinger: $|\alpha\rangle \to U|\alpha\rangle$, A não muda.

  - Heisenberg: $A \to U^\dagger A U$, $|\alpha\rangle$ não muda.

Exemplo: translação infinitesimal $U = \mathcal{T}(d\vec{x}\,') = \left(1 - \frac{i\vec{p}\,d\vec{x}\,'}{\hbar}\right)$

Schrödinger:
$$\begin{cases} |\alpha\rangle \to \left(1 - \frac{i\vec{p}\cdot d\vec{x}\,'}{\hbar}\right)|\alpha\rangle \\ \hat{x} \to \hat{x} \end{cases}$$

Heisenberg:
$$|\alpha\rangle \to |\alpha\rangle$$
$$\hat{x} \to \underbrace{\left(1 + \frac{i\vec{p}\,d\vec{x}\,'}{\hbar}\right)}_{U^\dagger}\hat{x}\underbrace{\left(1 - \frac{i\vec{p}\,d\vec{x}\,'}{\hbar}\right)}_{U}$$
$$= \hat{x} + \frac{i}{\hbar}[\vec{p}\,d\vec{x}, \hat{x}] = x + d\vec{x}\,'$$

De qualquer forma $\langle x\rangle \to \langle x\rangle + \langle d\vec{x}\,'\rangle$

Kets e observáveis nas 2 descrições

• Por simplicidade, escolhemos $t_0=0$: $U(t,t_0=0)=U(t)=\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$

(H indep. t)

• Definimos o observável na descrição de Heisenberg:

$$A^{(H)}(t) \equiv U^\dagger(t)\,A^{(S)}\,U(t) \qquad \text{com} \qquad A^{(H)}(t=0) = A^{(S)}.$$

• Kets também coincidem em $t=0$; depois $|\alpha\rangle_H$ fica fixo $= |\alpha, t=0\rangle_S$.

$$|\alpha\rangle_H = |\alpha, t_0=0\rangle_S \quad \text{mas}$$

$$|\alpha, t\rangle_S = U(t)\,|\alpha, t=0\rangle_S$$

• Valores esperados são os mesmos nas 2 descrições:

$$_S\langle\alpha,t|A^{(S)}|\alpha,t\rangle_S = {}_S\langle\alpha,t=0|\underbrace{U^\dagger A U}_{A^{(H)}}|\alpha,t=0\rangle_S = {}_H\langle\alpha|\,A^{(H)}\,|\alpha\rangle_H$$

Eq. de movimento na descr. de Heisenberg

$$A^{H}(t) = U^\dagger(t)\,A^{(S)}\,U(t) \Rightarrow \frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{\partial U^\dagger}{\partial t}A^{(S)}U + U^\dagger A^{(S)}\frac{\partial U}{\partial t}$$

$UU^\dagger = 1$ $\qquad$ $UU^\dagger = 1$

$$\Rightarrow \; = -\frac{1}{i\hbar}U^\dagger H A^{(S)} U + \frac{1}{i\hbar}U^\dagger A^{(S)} H U$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}U^\dagger H U U^\dagger A^{(S)} U + \frac{1}{i\hbar}U^\dagger A^{(S)} U U^\dagger H U$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\Big[A^{(H)}, \underbrace{U^\dagger H U}_{H^{(H)}}\Big]$$

Uso: $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}HU$ e $\frac{\partial U^\dagger}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}U^\dagger H$ } é a eq. de Schrödinger p/ U

• Repare que se H é indep. de t, $U=\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$ e $H^{(H)} = U^\dagger H^{(S)} U = H^{(S)}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[A^{(H)}, H\right]} \quad \leftarrow \text{eq. de movimento de Heisenberg.}$$

- Reparem no análogo clássico para função $A(q,p)$ sem dependência temporal explícita, onde

$$\frac{dA}{dt} = [A,H]_{(CLASS)}$$ onde $[\ ,\ ]_{(CLASS)}$ = parênteses de Poisson.

Part. livre e teorema de Ehrenfest

- Para resolver a dinâmica precisamos de $\hat{H}$. Em caso de análogo clássico, troque $x \to \hat{x}$, $p \to \hat{p}$, com cuidado com ambiguidades devido à não-comutação. Por exemplo: $xp \to \hat{x}\hat{p}, \hat{p}\hat{x}$ ou $\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})$?

- Para a discussão abaixo precisaremos das fórmulas:

$$[x_i, F(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

$$[p_i, G(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

Provando: uso repetidamente $[A,BC]=[A,B]C + B[A,C]$

$$[x,p] = i\hbar$$
$$[x,p^2] = [x,p]p + p[x,p] = 2i\hbar p$$
$$[x,p^3] = [x,p^2]p + p^2[x,p] = 3i\hbar p^2$$
$$\Rightarrow \boxed{[x,p^n] = i\hbar n p^{n-1}} \quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned} f(p) &= \sum_n c_n p^n \\ \frac{\partial f}{\partial p} &= \sum_n c_n n p^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [x, f(p)] = [x, \sum_n c_n p^n] = \sum_n c_n [x,p^n] \overset{\text{I}}{=} \sum_n c_n i\hbar n p^{n-1} = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p}$$

o 2º resultado é provado de forma parecida.

Part. livre na descrição de Heisenberg

- $H = \frac{p^2}{2m} = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$ $\quad$ p_i, x_i = operadores na descrição de Heisenberg

- p_i comuta com qq. função dos p_j's: $\Rightarrow$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, H] = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i(t) = p_i(0)$$

- isso é exemplo de fato + geral: se $A^{(H)}$ comuta com H, $A^{(H)}$ é cte do movimento.

- Agora x_i:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{1}{i\hbar}\frac{1}{2m} i\hbar \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_{j=1}^{3} p_j^2\right)}_{2p_i}$$

[Usei $[x_i, F(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}$

$$= \frac{p_i}{m} = \frac{p_i(0)}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_i(t) = x_i(0) + \frac{p_i(0)}{m}t}$$ ← lembra a eq. clássica de movimento.

- Note que $[x_i(0), x_j(0)] = 0$ mas isso não é mais verdade p/ $t > 0$:

$$[x_i(t), x_i(0)] = \left[\frac{p_i(0)t}{m}, x_i(0)\right] = -\frac{i\hbar t}{m}$$

- Aplico a rel. de incerteza p/ $x_i(t), x_i(0)$:

$$\boxed{\langle(\Delta x_i(t))^2\rangle\langle(\Delta x_i(0))^2\rangle \geq \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}$$

← Mesmo que a part. esteja bem-localizada em $t=0$, sofrerá dispersão p/ $t > 0$.

- Adicionando $V(x)$ à part. livre:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$V(\vec{x})$ é função dos operadores x, y, z.

- Uso $[p_i, G(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial G}{\partial x_i}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p_i, V(\vec{x})] = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x})}$ (I)

- Eq. p/ $x_i(t)$: $\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x_i, H] = \frac{p_i}{m}$ [x_i comuta com novo termo $V(\vec{x})$]

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{dx_i}{dt}, H\right] = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{p_i}{m}, H\right] = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x_i}{dt} = \frac{1}{m}\frac{dp_i}{dt}} \quad \text{(II)}$$

- Combina (I) e (II): $\boxed{m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{x})}$ (III) ⇐ eq. p/ operadores em MQ da 2ª Lei de Newton.

- Tiro valores esperados: $\boxed{m\frac{d^2\langle\vec{x}\rangle}{dt^2} = \frac{d\langle\vec{p}\rangle}{dt} = -\langle\vec{\nabla} V(\vec{x})\rangle}$ (IV)

(IV) é o teorema de Ehrenfest, e é verdade p/ descrição de Heisenberg ou Schrödinger (valores esperados são os mesmos).

- Os valores esperados se comportam como partícula clássica.

Vetores-base

- Como observáveis são funções de t na descrição de Heisenberg, seus autovetores (uma base) também serão. Vejamos isso com mais cuidado.

$$A^{(H)}(t) = U^\dagger A(0)\, U \qquad A^{(H)}(t)$$

autovalores de observáveis equivalentes não mudam

eq. de autovalores: $\underbrace{U^\dagger A(0) U}_{A^{(H)}(t)} |a'(t)\rangle = a' |a'(t)\rangle$

avaliada em $t=0$: $A(0) \underset{UU^\dagger = \mathbb{1}}{\wedge} |a'(0)\rangle = a' |a'(0)\rangle$

$$\Rightarrow \underbrace{U^\dagger A(0)\, U}_{} U^\dagger |a'(0)\rangle = U^\dagger a' |a'(0)\rangle$$

$$A^{(H)} \left(U^\dagger |a'(0)\rangle \right) = a' \left(U^\dagger |a'(0)\rangle \right)$$

- Vemos que a base de auto-estados de $A^{(H)}$ evolui assim:

$$\boxed{|a'(t)\rangle_H = U^\dagger |a'(0)\rangle}$$

$\leftarrow$ o $U^\dagger$ mostra que autovetores evoluem ao contrário dos vetores na descrição de Schrödinger

- A evolução dos auto-vetores satisfaz à eq. de Schrödinger com sinal "errado": $\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |a'(t)\rangle_H = -H |a'(t)\rangle_H}$

- A representação espectral é consistente:

$$A^{(H)}(t) = U^\dagger A^{(S)} U = \sum_i U^\dagger |a_i\rangle a_i \langle a_i| U = \sum_i |a_i(t)\rangle a_i \langle a_i(t)|$$

- Os coeficientes de $|\alpha\rangle$ na base são os mesmos nas 2 descrições:

$c_i(t) = \langle a_i| \left(U |\alpha, t=0\rangle \right)$ Schrödinger: $|\alpha\rangle = |\alpha, t\rangle$, $|a_i\rangle$ fixo

$= \left(\langle a_i| U \right) |\alpha, t=0\rangle$ Heisenberg: $|\alpha\rangle$ fixo ; $|a_i\rangle = |a_i(t)\rangle$

Amplitudes de transição

- Em $t=0$ temos autoestado de A com autovalor a_i. No tempo t, qual é a [amplitude de probabilidade] de encontrarmos o sistema num auto-estado de B com autovalor b_j? = amplitude de transição

Schrödinger: $\langle b_j | \left(U | a_i \rangle \right)$

Heisenberg: $\left(\langle b_j | U \right) | a_i \rangle$.

- São a mesma amplitude: $\langle b_j | U(t,0) | a_i \rangle$

- Chamamos de amplitude de transição do est. $|a_i\rangle$ para o $|b_j\rangle$

Resumo:

	Schrödinger	Heisenberg
ESTADO:	MUDA $\lvert\alpha, t\rangle = U(t,t_0)\lvert\alpha, t_0\rangle$ $i\hbar \frac{\partial \lvert\alpha,t\rangle}{\partial t} = H\lvert\alpha,t\rangle$	ESTACIONÁRIO
Observável:	ESTACIONÁRIO	MUDA $A^{(H)}(t) = U^{\dagger} A^{(S)} U$ $\frac{dA^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A^{(H)}, H]$
Vetor-base	ESTACIONÁRIO	MUDA NA "DIREÇÃO OPOSTA" $\lvert a', t\rangle_H = U^{\dagger}\lvert a'\rangle$ $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\lvert a', t\rangle_H = -H\lvert a', t\rangle$